CS121 Digital Logic and Smart Device

Chapter 4

Logic Simplification

By Dr. Paween Khoenkaw
Computer Science MJU

- เทอมที่ไม่สนใจ (Don’t care term)
- รหัสเกรย์ (Gray Code)
- แผนผังคาร์โนห์ (Karnaugh Maps)

เทอมที่ไม่สนใจ

เทอมที่ไม่สนใจ (อังกฤษ: Don't-Care term) คือค่าของตรรกะที่จะเป็น 0 หรือ 1 ก็ได้ มักใช้ในอินพุตหรือเอาต์พุตที่ไม่สนใจค่า สำหรับอินพุตที่ไม่สนใจค่านั้น เนื่องจากอินพุตนั้นจะไม่มีโอกาสที่จะเกิดขึ้น หรือการเปลี่ยนแปลงของอินพุต จะไม่ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของเอาต์พุต ส่วนเอาต์พุตที่ไม่สนใจค่านั้น เนื่องจากไม่ได้ใช้เอาต์พุตเหล่านั้น

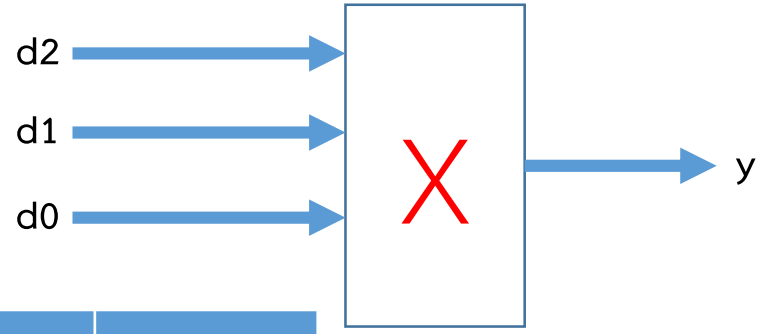
เทอมที่ไม่สนใจ = ค่าตรรกะที่ไม่มีผลกับคำตอบ

จะเกิดที่ input หรือ output ก็ได้

มักนิยมแทนด้วยตัว “x”

เทอมที่ไม่สนใจ

วงจรตรวจสอบเลขคู่: กำหนดให้ข้อมูลขาเข้าเป็นเลขฐาน 2 ขนาด 3 บิต หลังจากตรวจสอบแล้วหากพบว่าเป็นเลขคู่ ให้ตอบ “1” แต่หากเป็นเลขคี่ให้ตอบ “0”



Input: d2,d1,d0

Output: y

	INPUT			OUTPUT
	d2	d1	d0	y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

จากโจทย์จะเห็นว่า การตรวจสอบความเป็นเลขคู่และเลขคี่ ไม่จำเป็นต้องดูเลขทุกหลัก ดูแค่หลักสุดท้ายก็พอ

เทอมที่ไม่สนใจ

วงจรตรวจสอบเลขคู่: กำหนดให้ข้อมูลขาเข้าเป็นเลขฐาน 2 ขนาด 3 บิต หลังจากตรวจสอบแล้วหากพบว่าเป็นเลขคู่ ให้ตอบ “1” แต่หากเป็นเลขคี่ให้ตอบ “0”

	INPUT			OUTPUT
	d2	d1	d0	y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	INPUT			OUTPUT
	d2	D1	D0	y
0	X	X	0	1
1	X	X	1	0
2	X	X	0	1
3	X	X	1	0
4	X	X	0	1
5	X	X	1	0
6	X	X	0	1
7	X	X	1	0

	INPUT	OUTPUT
	D0	y
0	0	1
1	1	0
2	0	1
3	1	0
4	0	1
5	1	0
6	0	1
7	1	0

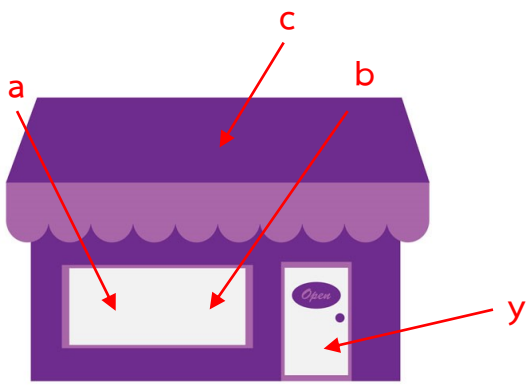
Input ตัวไหนเป็น X ทั้งหมด ก็สามารถตัดออกได้

	INPUT	OUTPUT
	D0	y
0	0	1
1	1	0

$$y = \overline{d0}$$

เทอมที่ไม่สนใจ

ประตูอัตโนมัติ: ประตูอัตโนมัติจะปลดล็อคเองในเวลากลางวันที่มีคนอยู่ในร้าน ส่วนเวลากลางคืนจะไม่เปิด



Input: a,b,c

Output: y

INPUT			OUTPUT
c	b	A	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

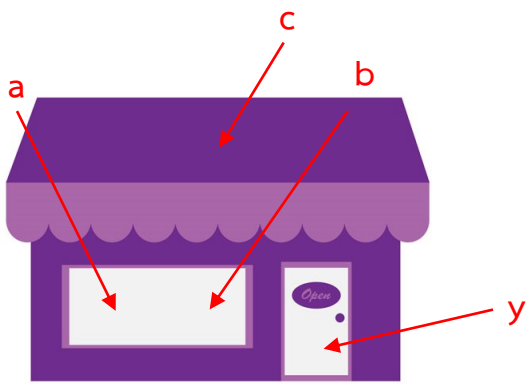
a,b= ตรวจจับคน 0 = ไม่มีคน, 1= มีคน

c= เซ็นเซอร์วัดแสง 0 = กลางคืน, 1= กลางวัน

c= ประตู 0 = unlock , 1= lock

เทอมที่ไม่สนใจ

ประตูอัตโนมัติ: ประตูอัตโนมัติจะปลดล็อคเองในเวลากลางวันที่มีคนอยู่ในร้าน ส่วนเวลากลางคืนจะไม่เปิด



Input: a,b,c

Output: y

INPUT			OUTPUT
c	b	A	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

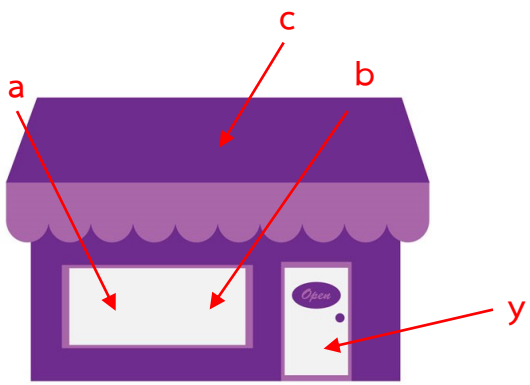
a,b= ตรวจจับคน 0 = ไม่มีคน, 1= มีคน

c= เซ็นเซอร์วัดแสง 0 = กลางคืน, 1= กลางวัน

c= ประตู 0 = unlock , 1= lock

เทอมที่ไม่สนใจ

ประตูอัตโนมัติ: ประตูอัตโนมัติจะปลดล็อคเองในเวลากลางวันที่มีคนอยู่ในร้าน ส่วนเวลากลางคืนจะไม่เปิด



Input: a,b,c

Output: y

INPUT			OUTPUT
c	b	A	Y
0	X	X	1
0	X	X	1
0	X	X	1
0	X	X	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

a,b= ตรวจจับคน 0 = ไม่มีคน, 1= มีคน

c= เซ็นเซอร์วัดแสง 0 = กลางคืน, 1= กลางวัน

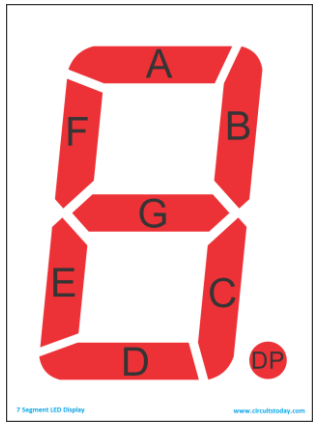
$$y = c\overline{ba}$$

c= ประตู 0 = unlock , 1= lock

เทอมที่ไม่สนใจ

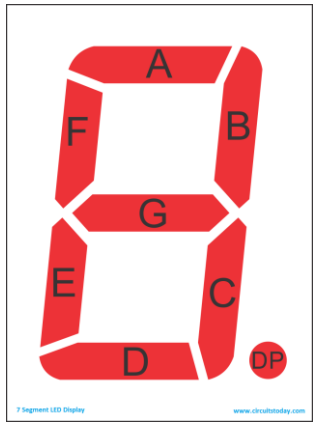
วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		a	b	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1								
1	1	0				เอาไงดี ?				
1	1	1								



วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

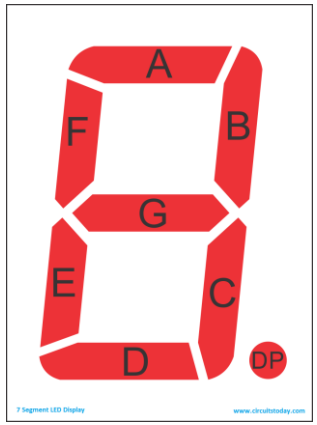
INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		a	b	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		0	0	0	0	0	0	0
1	1	0		0	0	0	0	0	0	0
1	1	1		0	0	0	0	0	0	0



ถ้าเรากำหนดให้หลอดดับไปเลย

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		a	b	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		0	0	0	0	0	0	0
1	1	0		0	0	0	0	0	0	0
1	1	1		0	0	0	0	0	0	0



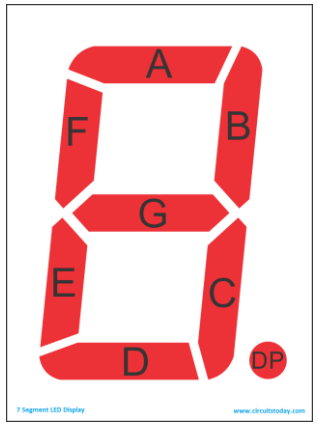
เราต้องออกแบบวงจร

22 pattern

เทอมที่ไม่สนใจ

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		X	X	X	X	X	X	X
1	1	0		X	X	X	X	X	X	X
1	1	1		X	X	X	X	X	X	X



หรือเราเลือกที่จะไม่สนใจ

เจอ “x” แล้วจะออกแบบวงจรอย่างไร

?

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		X	X	X	X	X	X	X
1	1	0		X	X	X	X	X	X	X
1	1	1		X	X	X	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	X	X	X	X	X	X
1	1	0		1	X	X	X	X	X	X
1	1	1		1	X	X	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

ถ้าใช้ Maxterm ก็เติม 1 เพื่อให้ง่าย

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	X	X	X	X	X	X
1	1	0		1	X	X	X	X	X	X
1	1	1		1	X	X	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x”
ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	X	X	X	X	X
1	1	0		1	0	X	X	X	X	X
1	1	1		1	0	X	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

ถ้าใช้ Minterm ก็เติม 0 เพื่อให้ง่าย

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	X	X	X	X	X
1	1	0		1	0	X	X	X	X	X
1	1	1		1	0	X	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x”
ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	X	X	X	X
1	1	0		1	0	0	X	X	X	X
1	1	1		1	0	0	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	X	X	X	X
1	1	0		1	0	0	X	X	X	X
1	1	1		1	0	0	X	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	X	X	X
1	1	0		1	0	0	1	X	X	X
1	1	1		1	0	0	1	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	X	X	X
1	1	0		1	0	0	1	X	X	X
1	1	1		1	0	0	1	X	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	X	X
1	1	0		1	0	0	1	1	X	X
1	1	1		1	0	0	1	1	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

$$e = 1$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	X	X
1	1	0		1	0	0	1	1	X	X
1	1	1		1	0	0	1	1	X	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

$$e = 1$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	1	X
1	1	0		1	0	0	1	1	1	X
1	1	1		1	0	0	1	1	1	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

$$e = 1$$

$$f = d2 + \overline{d1} + \overline{d0}$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	1	X
1	1	0		1	0	0	1	1	1	X
1	1	1		1	0	0	1	1	1	X

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x”
ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

$$e = 1$$

$$f = d2 + \overline{d1} + \overline{d0}$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	1	1
1	1	0		1	0	0	1	1	1	1
1	1	1		1	0	0	1	1	1	1

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

$$e = 1$$

$$f = d2 + \overline{d1} + \overline{d0}$$

$$g = d2 + \overline{d1} + d0$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	1	1
1	1	0		1	0	0	1	1	1	1
1	1	1		1	0	0	1	1	1	1

ในการออกแบบวงจร ถ้าเจอ “x” ให้เติม logic อะไรก็ได้ลงไป

$$a = (d2 + d1 + \overline{d0})(d2 + \overline{d1} + \overline{d0})$$

$$b = \overline{d2d1d0} + \overline{d2}d1d0$$

$$c = \overline{d2d1d0} + \overline{d2d1}d0 + \overline{d2}d1d0$$

$$d = (d2 + d1 + d0)(\overline{d2} + d1 + d0)$$

$$e = 1$$

$$f = d2 + \overline{d1} + \overline{d0}$$

$$g = d2 + \overline{d1} + d0$$

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		a	b	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		0	0	0	0	0	0	0
1	1	0		0	0	0	0	0	0	0
1	1	1		0	0	0	0	0	0	0

22 pattern

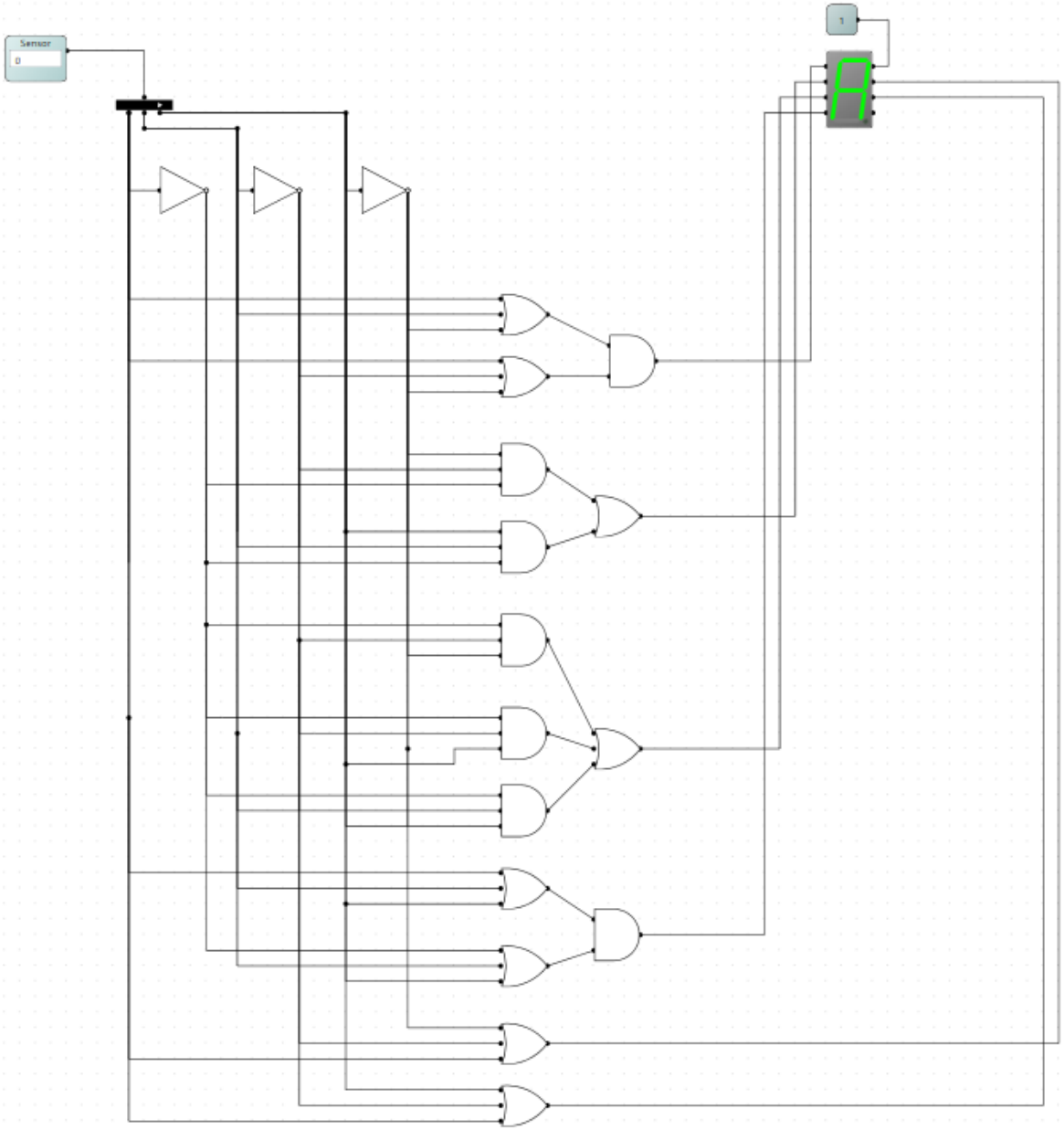
INPUT			OUTPUT							
d2	d1	d0		A	B	c	d	E	f	G
0	0	0	A	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	B	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	C	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	D	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	F	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1		1	0	0	1	1	1	1
1	1	0		1	0	0	1	1	1	1
1	1	1		1	0	0	1	1	1	1

11 pattern

วงจรลดลงเหลือครึ่งเดียว

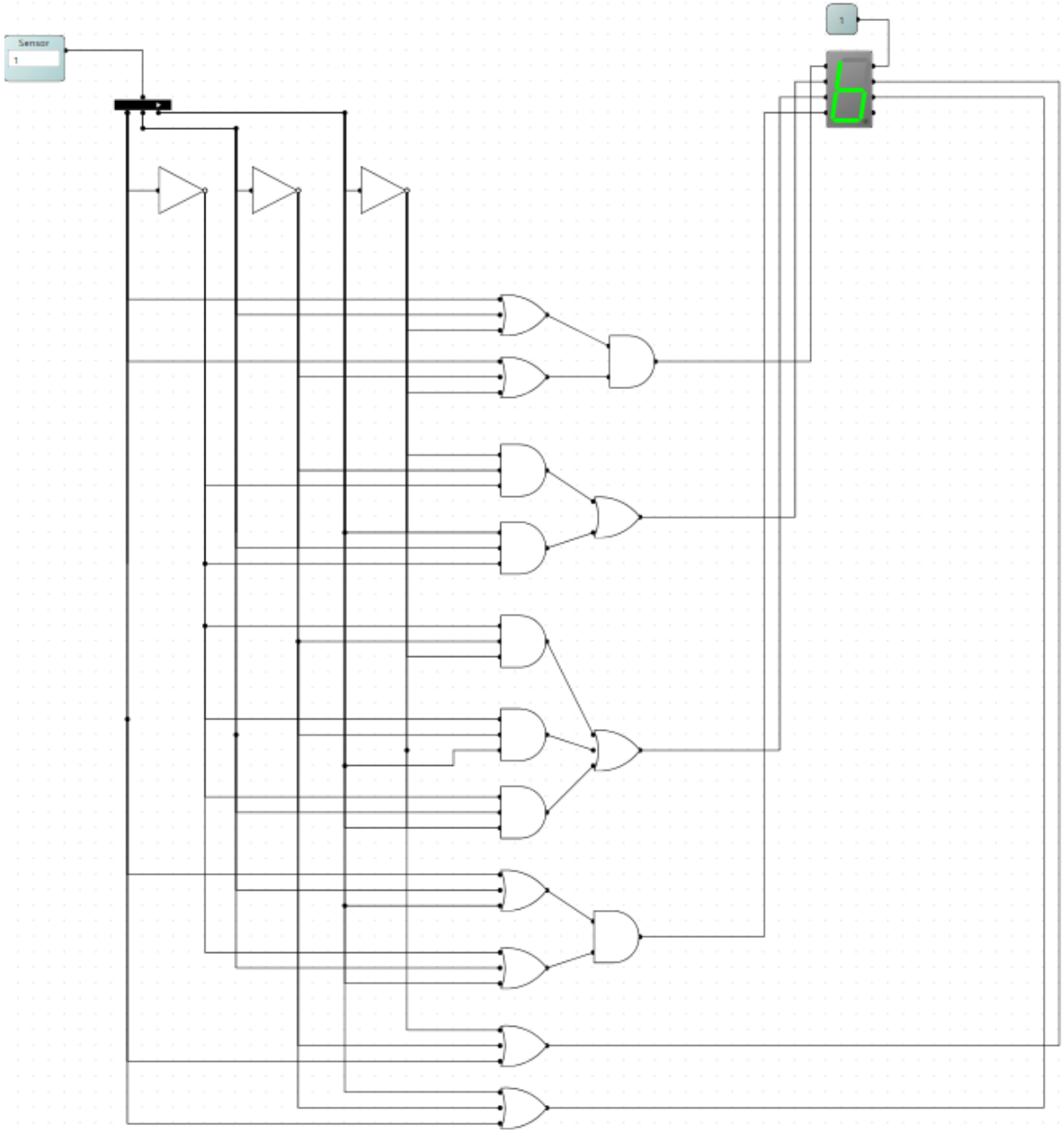
แต่ผู้ใช้วงจรต้องรู้ว่าห้ามป้อน input เป็น 101, 110 และ 111

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



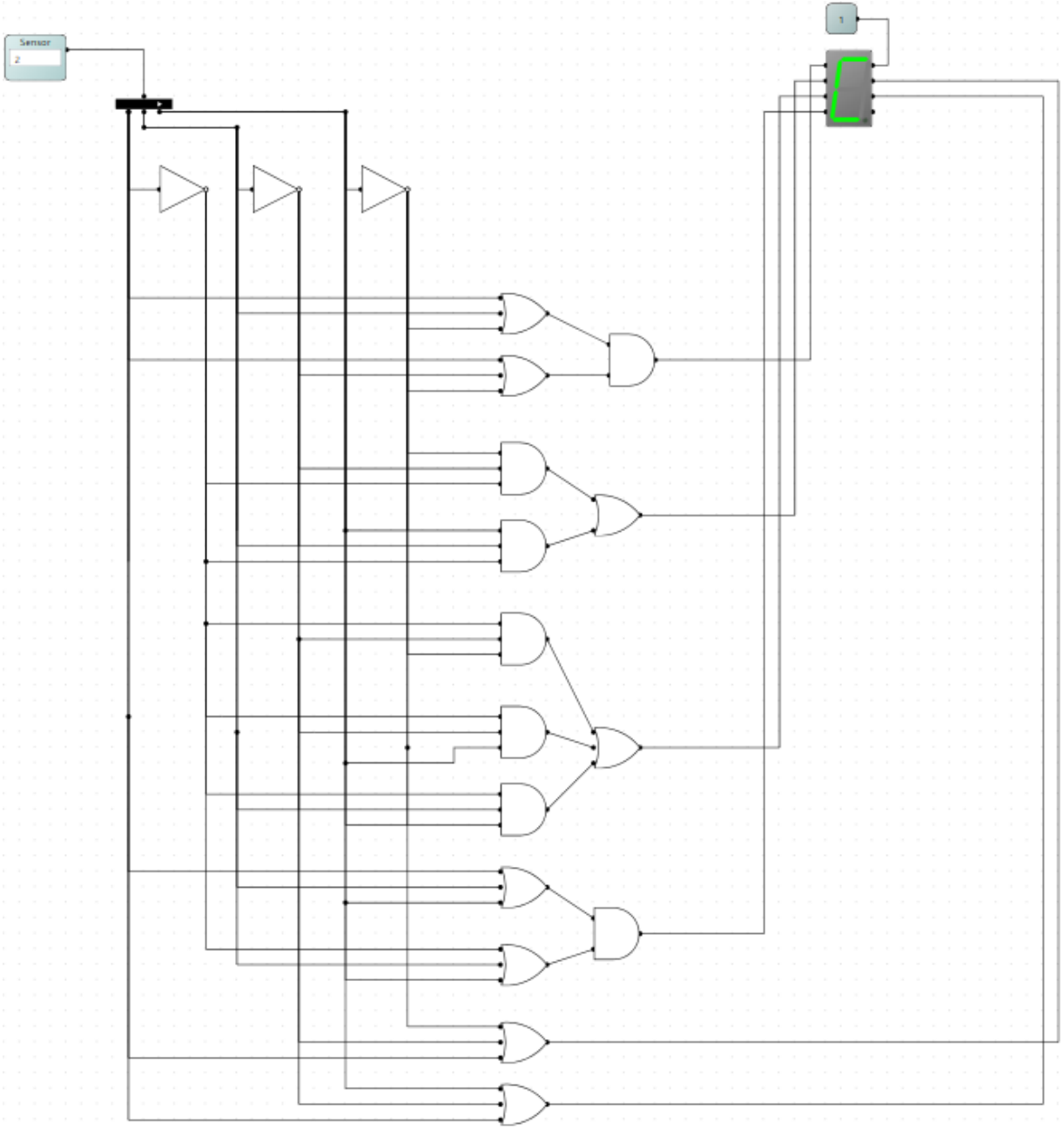
0 0 0

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



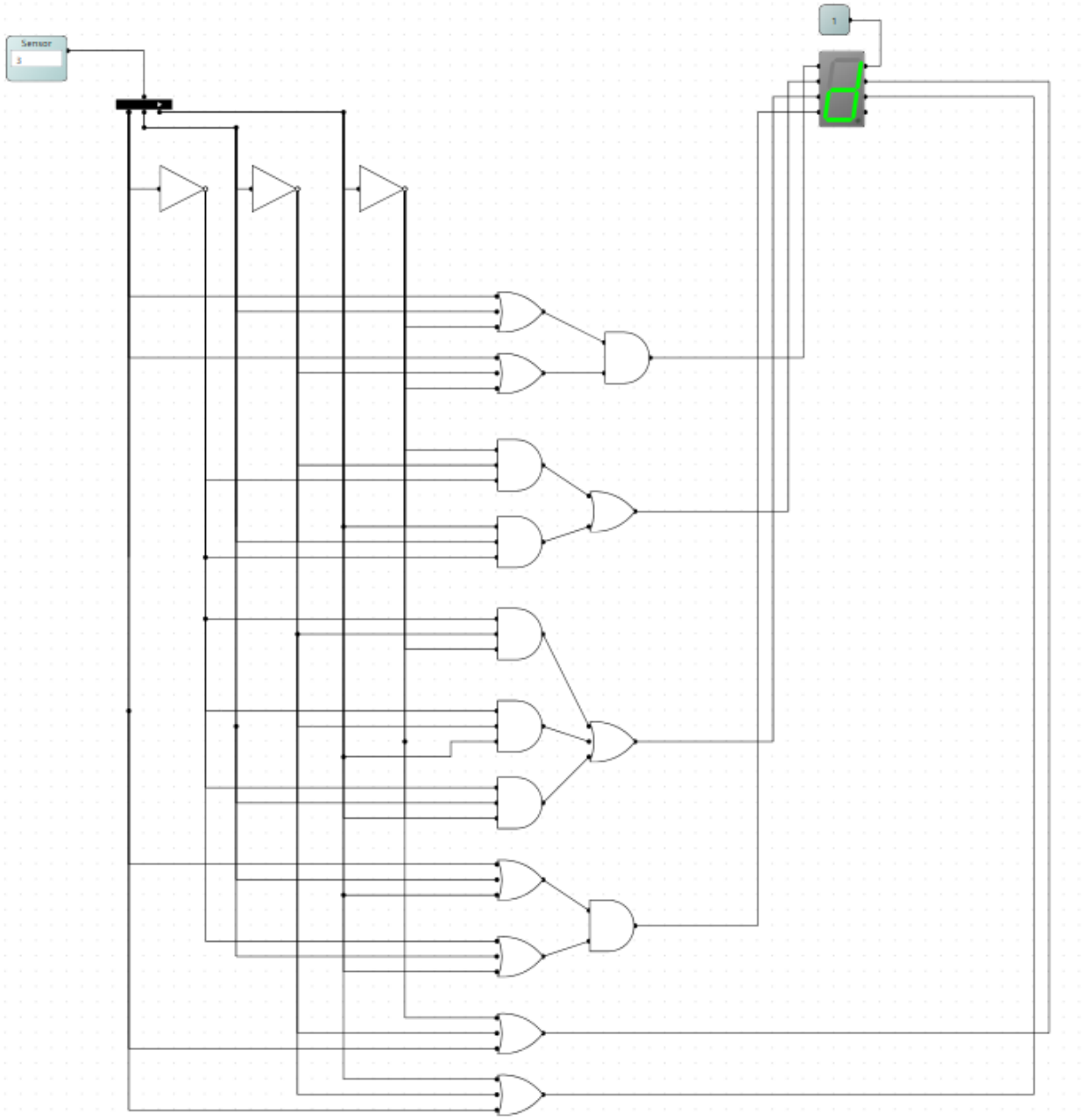
0 0 1

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



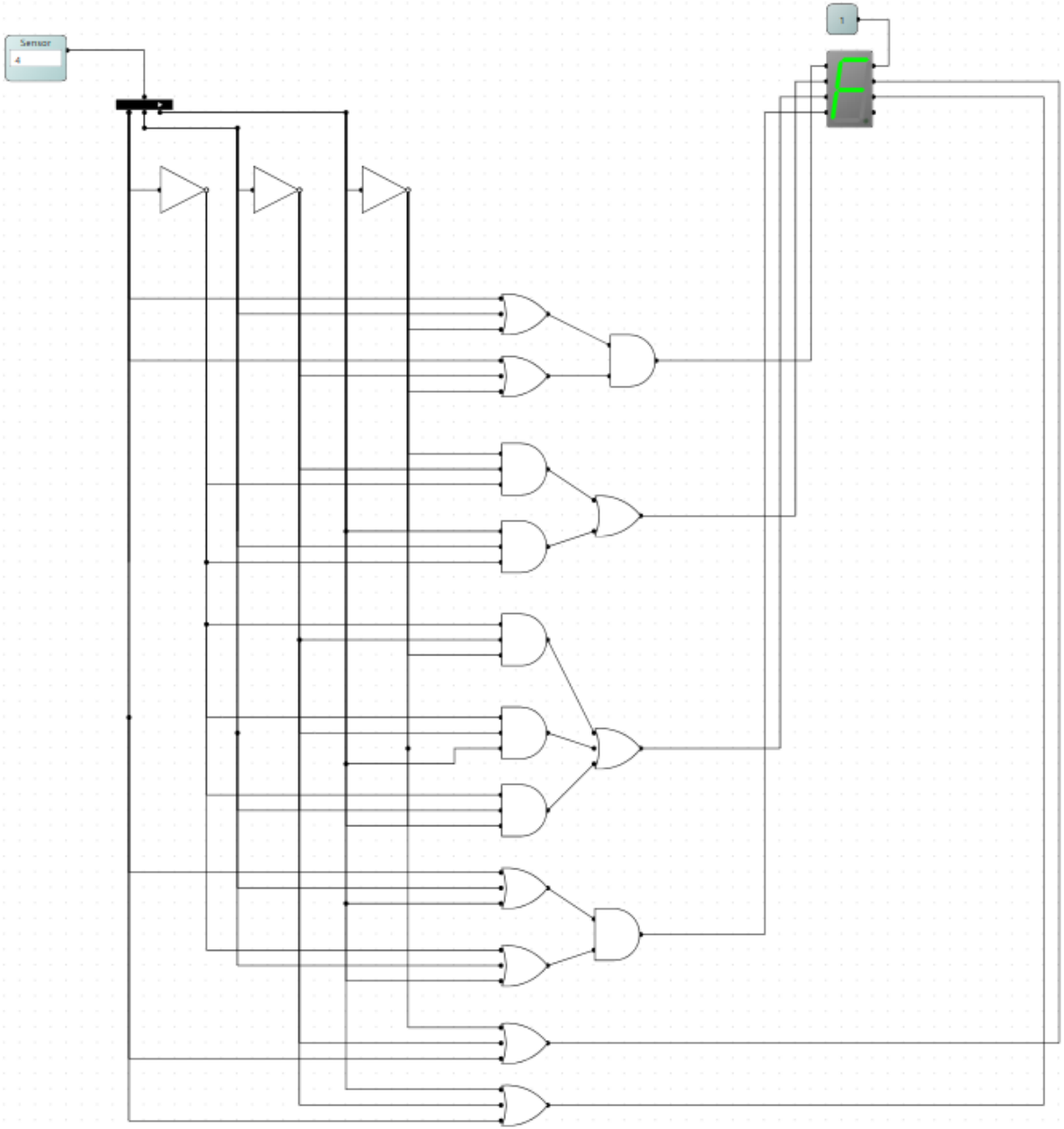
0 1 0

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



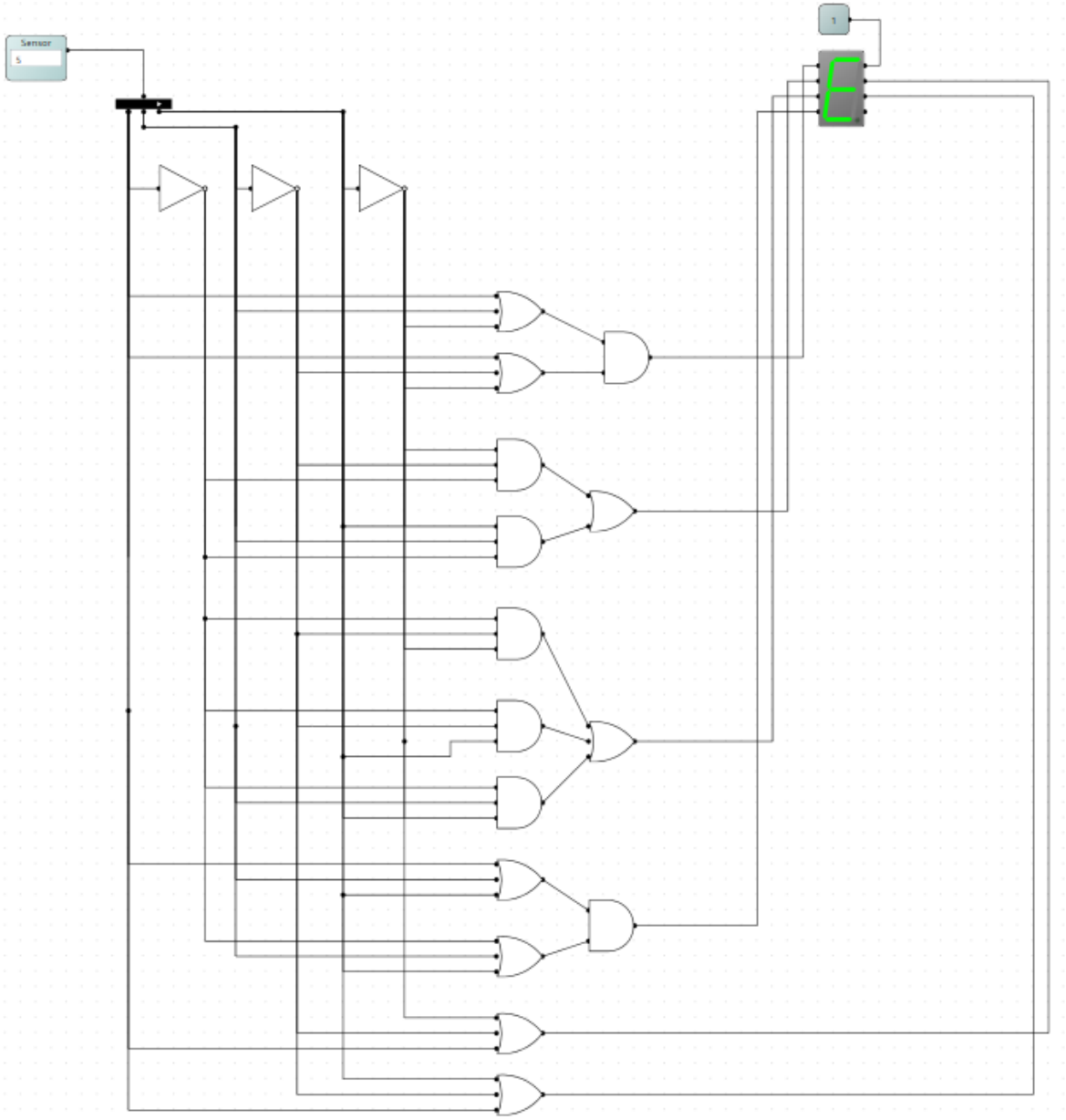
0 1 1

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



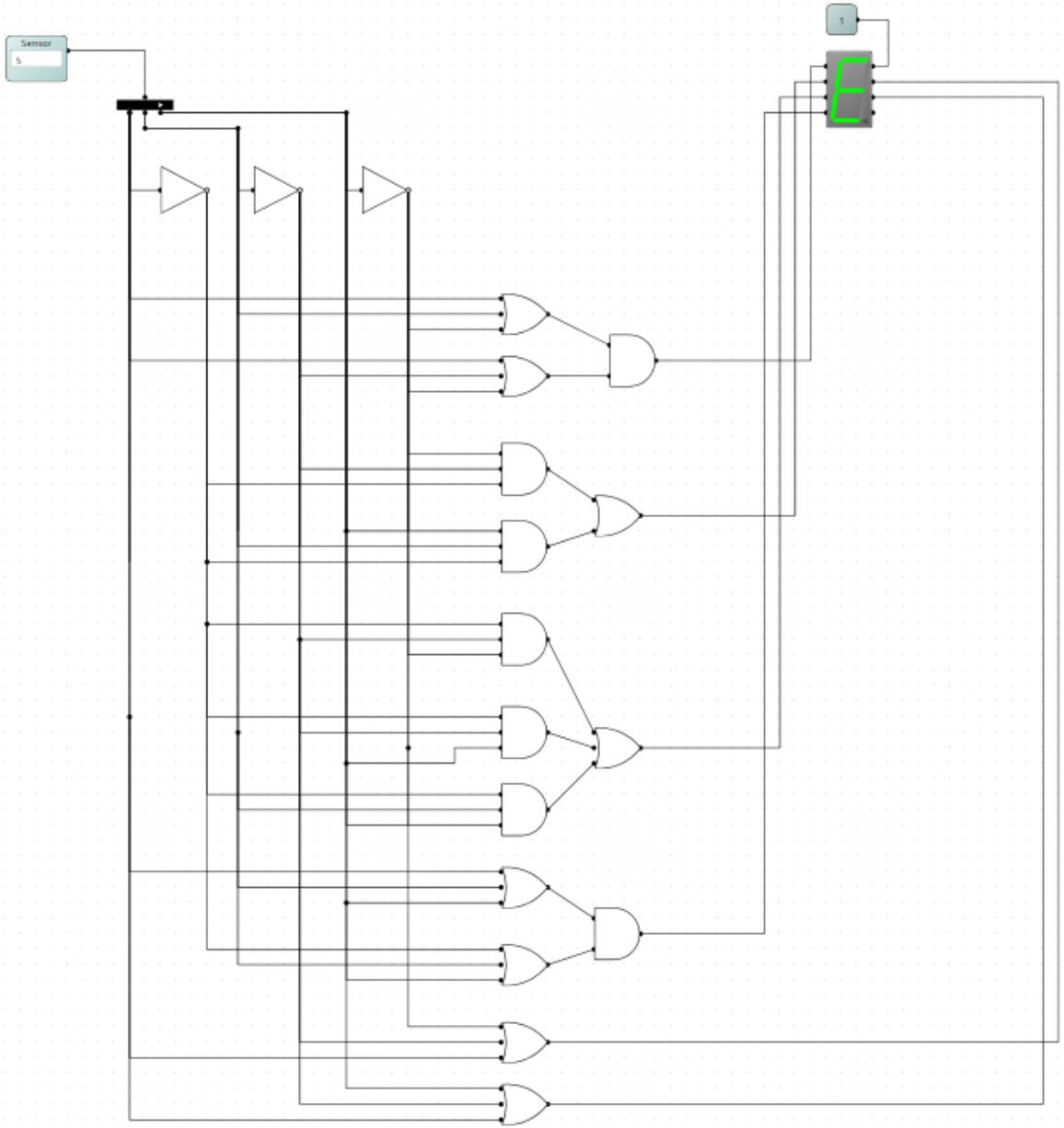
1 0 0

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



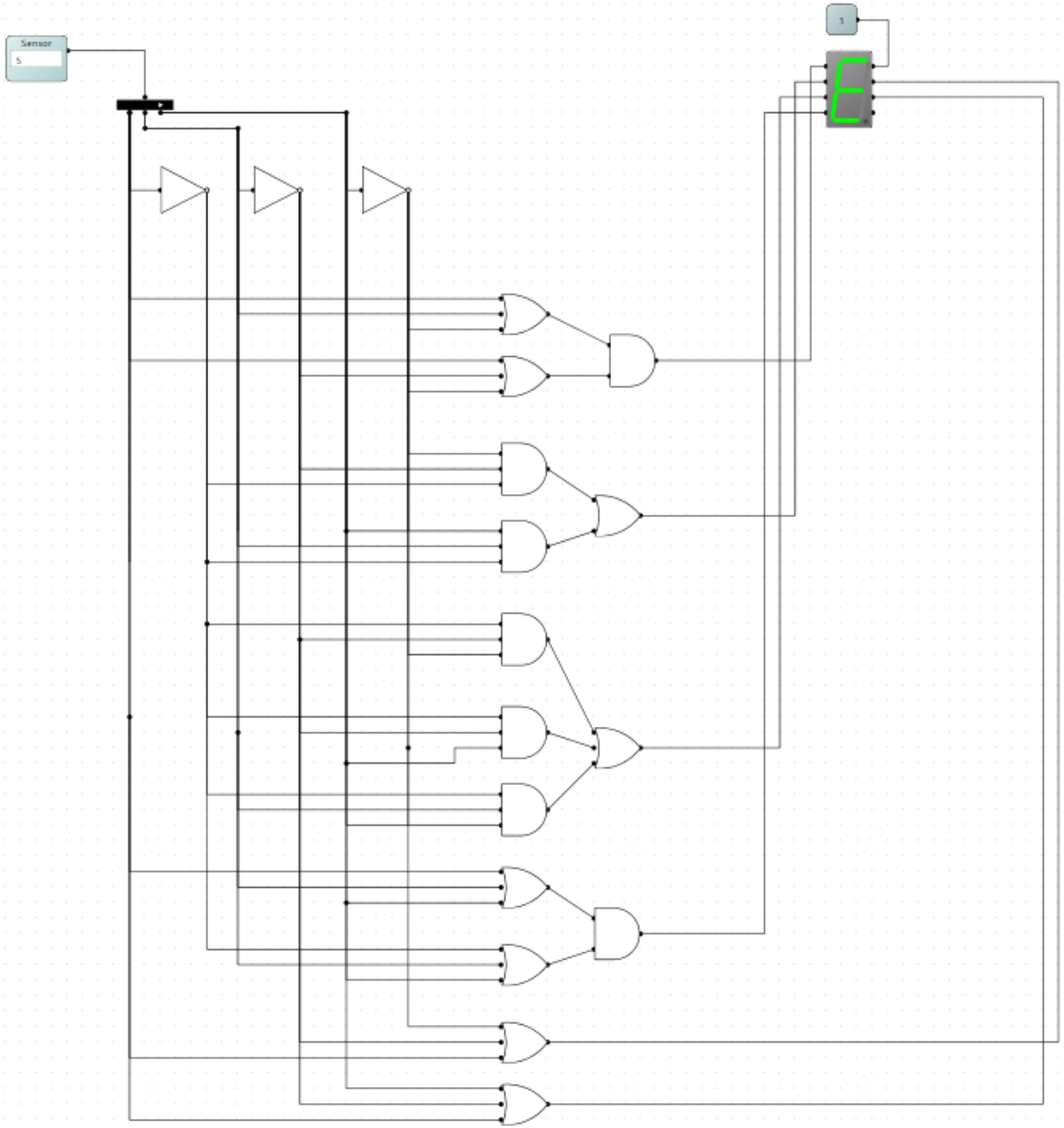
1 0 1

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน



1 1 0

วงจรแสดงเกรดนักศึกษา A,B,C,D,F ด้วยหลอด LED แบบ 7 ส่วน

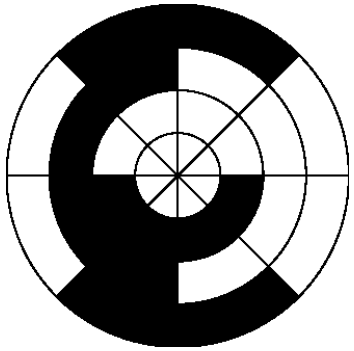


1 1 1

รหัสเกรย์

รหัสเกรย์ (Gray code) หรือ Reflected binary code (RBC) คือ การนำเอาเลขฐานสอง BCD มาเรียงใหม่ เพื่อให้มีการเปลี่ยนแปลงเพียง 1 บิต มักนิยมใช้ในการนับ ระบุตำแหน่ง หรือการส่งข้อมูล เนื่องจาก มีการเปลี่ยนแปลงไม่เกิน 1 บิต ทำให้ง่ายต่อการตรวจสอบความผิดพลาด

เลขฐาน 10	เลขฐาน2แบบ BCD	เลขฐาน2แบบ gray
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100



จานเข้ารหัสแบบ Gray

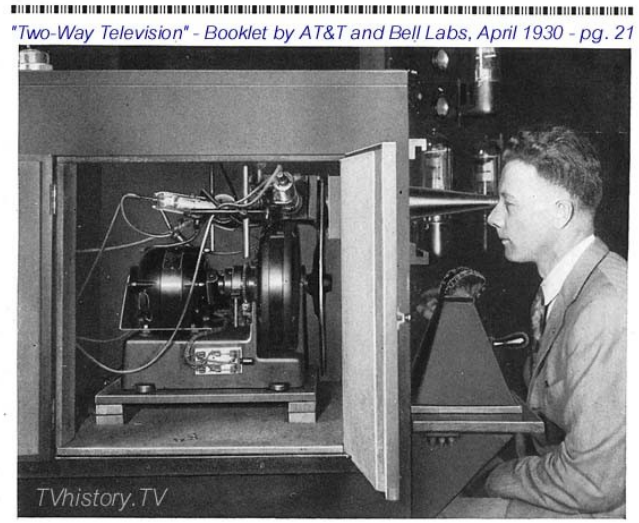
รหัสเกรย์

FRANK GRAY and A. L. Johnsrud in television booth. Behind the glass panels at sides and top are the photo-electric cells.

26

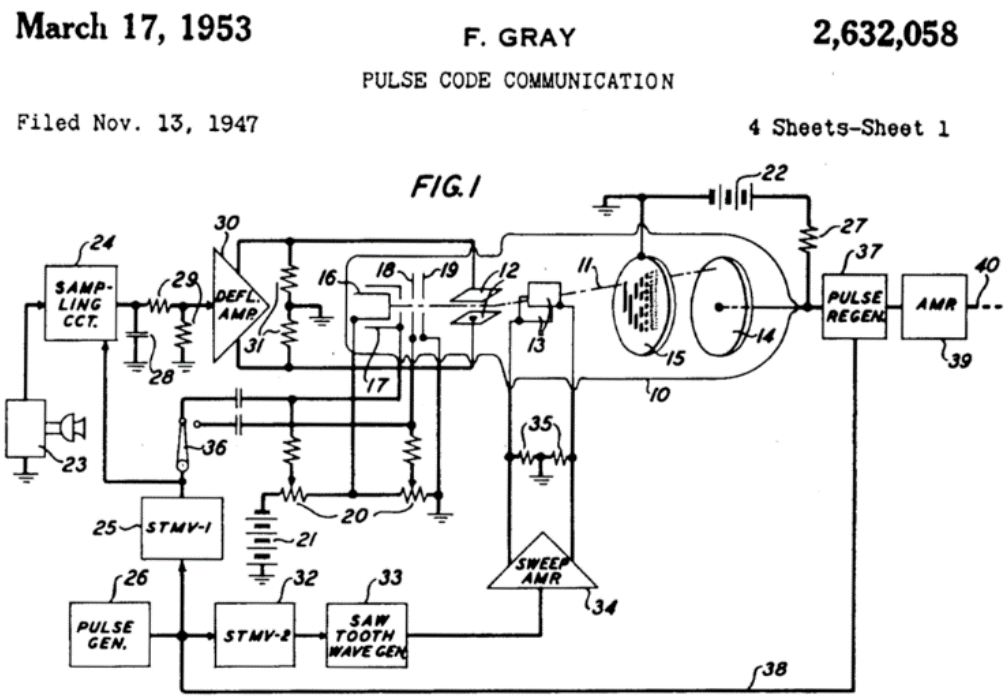
D. G. BLATTNER and L. G. Bostwick inspecting microphone and loud speaker, which are ordinarily concealed.

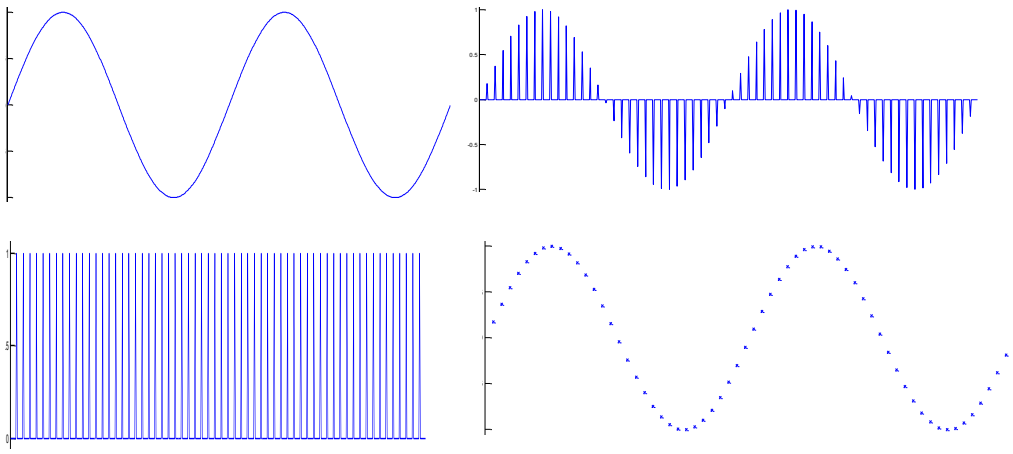
27



DETAILS of the color-television receiver.

Frank Gray (13 September 1887, Alpine, Indiana – 23 May 1969)





การสุ่มแบบ Pulse Code Modulation (PCM)

วิธีการสร้างรหัสเกรย์ (Gray code) จะมีขั้นตอนดังนี้

1 สร้างBCD ขนาด 1 บิต เรียกว่า L1

(ถ้ามีบิตเดียว Gray code จะเหมือน BCD code)

2 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิตให้นำ L1 มาเติม 0 ด้านหน้าโดยเรียงจากหน้าไปหลัง และนำมาต่อกับ L1 ที่เติม1 ด้านหน้า โดยเรียงกลับจากหลังไปหน้า

3 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิต ให้กลับไปทำข้อ 2 โดยเปลี่ยนจาก L1 เป็น L_{n-1} โดยที่ n คือจำนวนบิตที่ต้องการสร้างรหัสเกรย์

รหัสเกรย์

วิธีการสร้างรหัสเกรย์ (Gray code) จะมีขั้นตอนดังนี้

1 สร้างBCD ขนาด 1 บิต เรียกว่า L1

(ถ้ามีบิตเดียว Gray code จะเหมือน BCD code)

2 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิตให้นำ L1 มาเติม 0 ด้านหน้าโดยเรียงจากหน้าไปหลัง และนำมาต่อกับ L1 ที่เติม1 ด้านหน้า โดยเรียงกลับจากหลังไปหน้า

3 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิต ให้กลับไปทำข้อ 2 โดยเปลี่ยนจาก L1 เป็น L_{n-1} โดยที่ n คือจำนวนบิตที่ต้องการสร้างรหัสเกรย์

ตัวอย่างเช่น จงสร้างรหัสเกรย์ขนาด 2 บิต

L1={0, 1}

L2={ 0, 1, 1, 0}

L1 เรียงหน้า ไปหลัง L1 เรียงหลังไปหน้า

รหัสเกรย์

วิธีการสร้างรหัสเกรย์ (Gray code) จะมีขั้นตอนดังนี้

1 สร้างBCD ขนาด 1 บิต เรียกว่า L1

(ถ้ามีบิตเดียว Gray code จะเหมือน BCD code)

2 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิตให้นำ L1 มาเติม 0 ด้านหน้าโดยเรียงจากหน้าไปหลัง และนำมาต่อกับ L1 ที่เติม1 ด้านหน้า โดยเรียงกลับจากหลังไปหน้า

3 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิต ให้กลับไปทำข้อ 2 โดยเปลี่ยนจาก L1 เป็น L_{n-1} โดยที่ n คือจำนวนบิตที่ต้องการสร้างรหัสเกรย์

ตัวอย่างเช่น จงสร้างรหัสเกรย์ขนาด 2 บิต

L1={0, 1}

L2={ 00, 01, 11, 10}

เรียงหน้า ไปหลังให้เติม 0

เรียงหลังไปหน้าให้เติม 1

รหัสเกรย์

วิธีการสร้างรหัสเกรย์ (Gray code) จะมีขั้นตอนดังนี้

1 สร้างBCD ขนาด 1 บิต เรียกว่า L1

(ถ้ามีบิตเดียว Gray code จะเหมือน BCD code)

2 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิตให้นำ L1 มาเติม 0 ด้านหน้าโดยเรียงจากหน้าไปหลัง และนำมาต่อกับ L1 ที่เติม1 ด้านหน้า โดยเรียงกลับจากหลังไปหน้า

3 หากต้องการเพิ่มจำนวนบิต ให้กลับไปทำข้อ 2 โดยเปลี่ยนจาก L1 เป็น L_{n-1} โดยที่ n คือจำนวนบิตที่ต้องการสร้างรหัสเกรย์

ตัวอย่างเช่น จงสร้างรหัสเกรย์ขนาด 2 บิต

L1={0, 1}

L2={ 00, 01, 11, 10}

ตอบ

ฐาน 10	รหัสเกรย์
0	00
1	01
2	11
3	10

จงสร้างรหัสเกรย์ขนาด 3 บิต

L1={0, 1}

L2={00, 01, 11, 10}

L3={00, 01, 11, 10, 10, 11, 01, 00} นำ L2 มาเรียงใหม่ ทั้ง เดินหน้าและกลับหลัง

L3={000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100} เติม 0 และ 1

ตอบ

ฐาน 10	รหัสเกรย์
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

แผนผังคาร์โนห์

แผนผังคาร์โนห์ เป็นวิธีการในการลดรูปสมการบูลีน ที่ถูกพัฒนาโดย Maurice Karnaugh ในปี 1953 ซึ่งเป็นการนำเอาแผนผังของ Veitch มาพัฒนาต่อ

โดยนำเอาตารางค่าความจริงมาเขียนใหม่บน บนแผนที่ซึ่งใช้ gray code เป็นพิกัด (ตารางค่าความจริงให้ BCD เป็นพิกัด) ทำให้สามารถสังเกตผลของ input ที่ให้ output เหมือนกันได้ง่าย

Input ต่างกัน แต่ให้ output เหมือนกัน = ตัดออกได้

ตัวอย่างเช่น

a	f
0	1
1	1

$$f = \bar{a} + a$$

$$f = 1$$

a ไม่มีผลกับ f

a	b	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

b เป็น 0 จะทำให้เกิด f คนละค่ากับ b=1 จึงตัด b ออกไม่ได้

a=0 หรือ 1 ก็ให้ f เป็น 1 เหมือนกัน
a=0 หรือ 1 ก็ให้ f เป็น 0 เหมือนกัน
ดังนั้น a ตัดออกได้

แผนผังคาร์โนห์

แผนผังคาร์โนห์ (Karnaugh Map) หรือ Kmap เป็นวิธีการในการลดรูปสมการบูลีน ที่ถูกพัฒนาโดย Maurice Karnaugh ในปี 1953 ซึ่งเป็นการนำเอาแผนผังของ Veitch มาพัฒนาต่อ โดยนำเอาตารางค่าความจริงมาเขียนใหม่บน บนแผนที่ซึ่งใช้ gray code เป็นพิกัด (ตารางค่าความจริงให้ BCD เป็นพิกัด) ทำให้สามารถสังเกตผลของ input ที่ให้ output เหมือนกันได้ง่าย

Input ต่างกัน แต่ให้ output เหมือนกัน = ตัดออกได้

ตัวอย่างเช่น

a	f
0	1
1	1

a	b	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

การสังเกตตารางค่าความจริงจะทำได้ยาก เนื่องค่าของ input อาจเปลี่ยนแปลงได้พร้อมกันหลายบิต เนื่องจากแผนผังคาร์โนห์ ถูกออกแบบมาให้ สามารถสังเกตการณ์เปลี่ยนบิตได้ง่าย จึงเหมาะที่จะนำมาใช้ในการตัดตัวแปร

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

a	b	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

y	a = 0	a = 1
b = 0	1	0
b = 1	0	0

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

a	b	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ตัวแปร a มีค่าเป็น 0

y	a = 0	a = 1
b = 0	1	0
b = 1	0	0

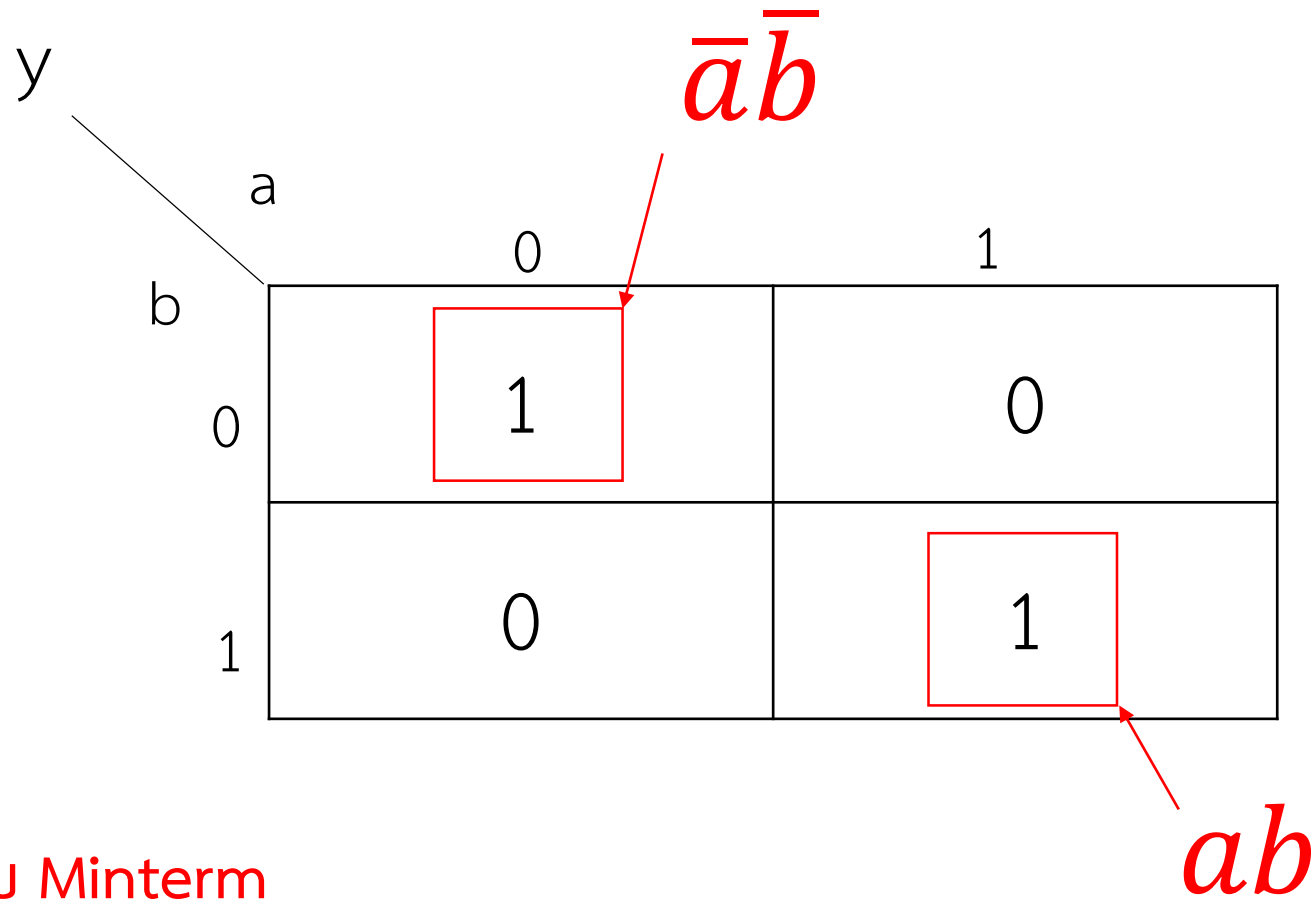
ตัวแปร b มีค่าเป็น 0

การแปลงเป็นสมการแบบ Minterm

$$y = \bar{a}\bar{b}$$

a	b	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต



การแปลงเป็นสมการแบบ Minterm

$$y = \bar{a}\bar{b} + ab$$

a	b	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

$\bar{a} + b$

y \ a, b	0	1
0	1	0
1	0	1

$a + \bar{b}$

การแปลงเป็นสมการแบบ Maxterm

$$y = (\bar{a} + b)(a + \bar{b})$$

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

รหัสเกรย์

y: a \ b c	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	0	0	1

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

$\bar{a}b\bar{c}$

y (a \ b, c)	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	0	0	1

$a\bar{b}c$

การแปลงเป็นสมการแบบ Minterm

$$y = \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c$$

แผนผังคาร์โน ดีกว่าตารางค่าความจริงอย่างไร ?

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

y \ a	0	1
b 0	1	1
1	0	0

ให้สังเกต Logic ที่ค่าเหมือนกันอยู่ติดกัน (เหมือนเล่นบิงโก)

ถ้าวงจรสามารถลดรูปได้ จะเกิดเหตุการณ์ที่มี Logic เหมือนกันอยู่ติดกัน

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

y \ a	0	1
b 0	1	1
1	0	0

ให้เลือกว่าจะใช้ Minterm (1) หรือ Maxterm (0)

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

y \ a	0	1
b 0	1	1
1	0	0

ถ้าตัวแปรใด มีค่าเป็นไปได้ทั้ง 0 และ 1 ให้ตัดออกได้

แต่ตัวแปรใดมีเพียง logic ค่าเดียว ให้สร้างสมการตาม minterm หรือ maxterm

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

y \ a	0	1
b 0	1	1
1	0	0

ตัวแปร a มีทั้ง 0 และ 1 จึงตัดออกได้

ตัวแปร b มีค่าเดียวคือ 0 จึงตัดออกไม่ได้

ตัวอย่าง Minterm

b มีค่าเป็น 0 เมื่อใช้ Minterm จึงได้สมการเป็น

$$y = \bar{b}$$

แผนผังคาร์โน ขนาด 2 บิต

y \ a	0	1
b 0	1	1
1	0	0

ตัวแปร a มีทั้ง 0 และ 1 จึงตัดออกได้

ตัวแปร b มีค่าเดียวคือ 0 จึงตัดออกไม่ได้

ตัวอย่าง Maxterm

b มีค่าเป็น 1 เมื่อใช้ Maxterm จึงได้สมการเป็น

$$y = \bar{b}$$

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

INPUT			OUTPUT
c	b	a	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

รหัสเกรย์

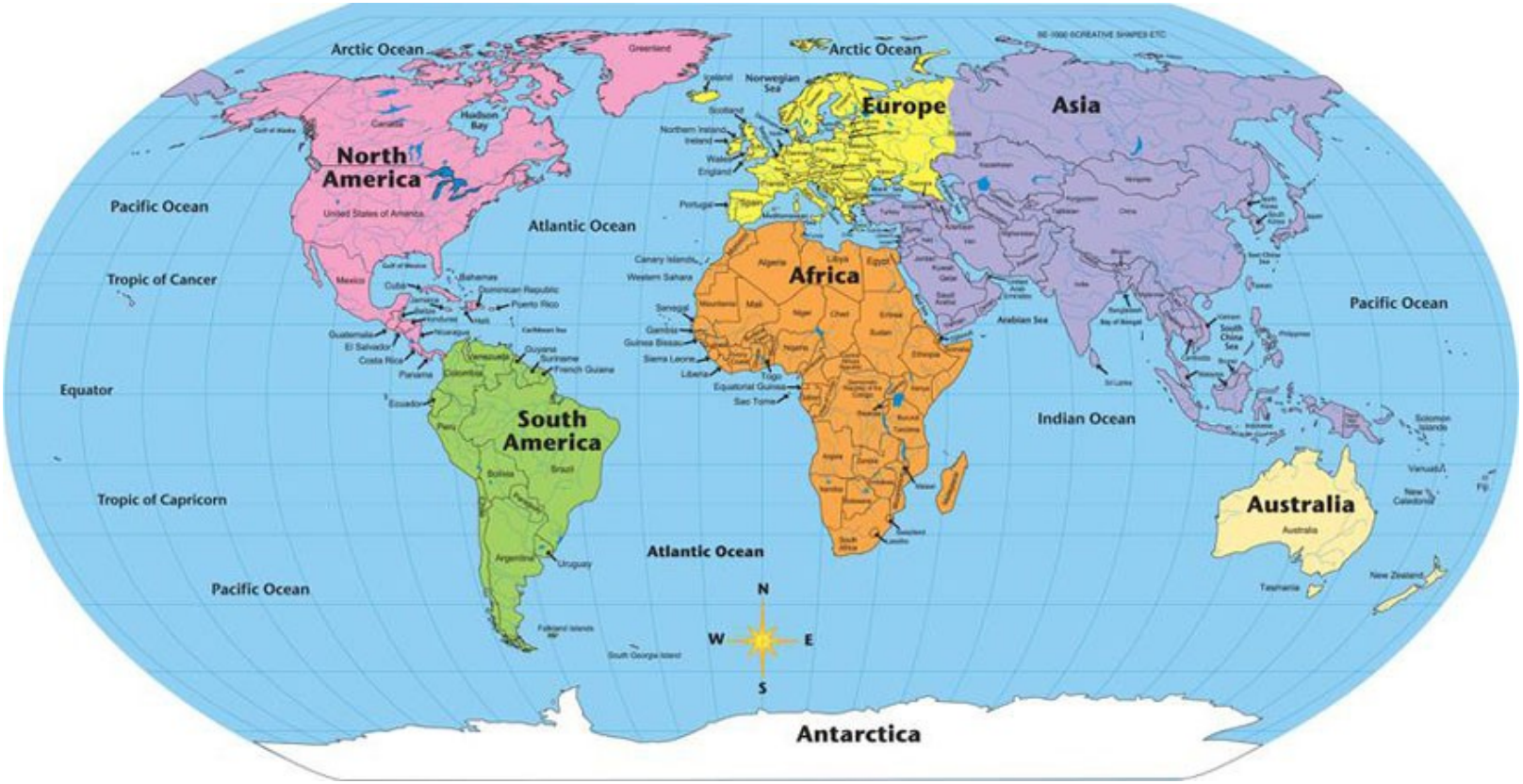
y (c \ ba)	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	0	0	0

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

y \ b a / c	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	0	0	0

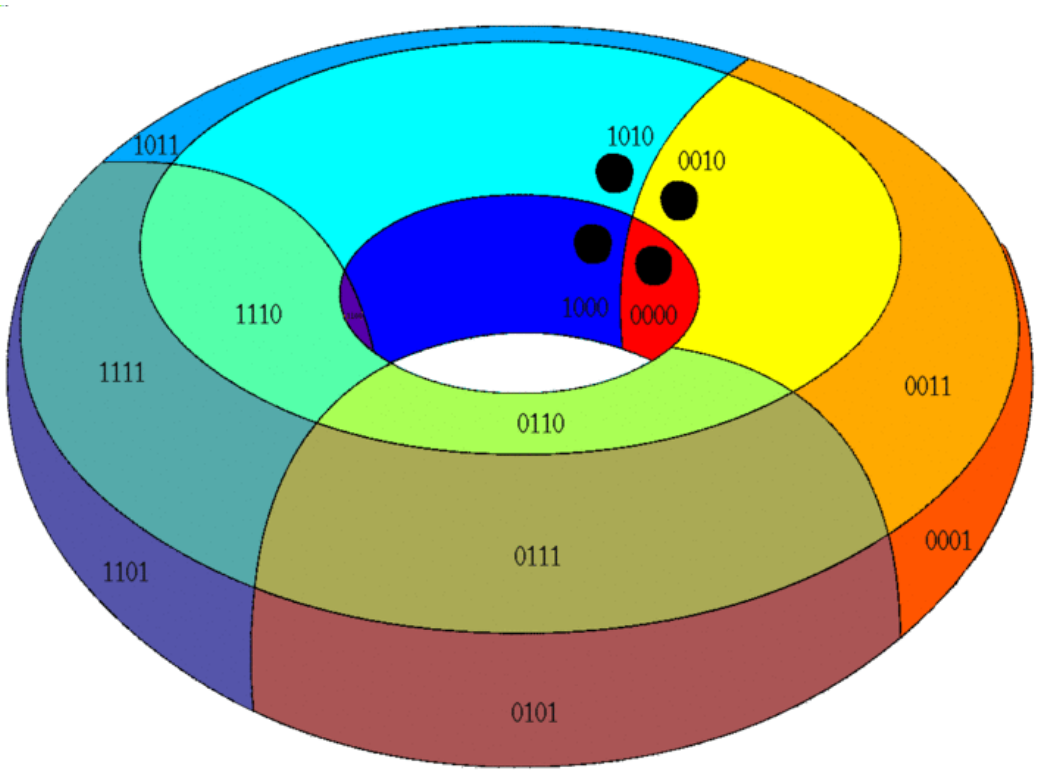
ถ้าใช้ Minterm

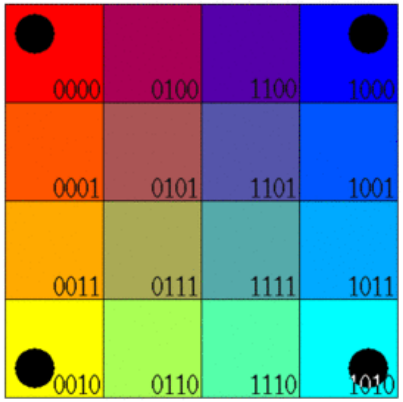
แผนที่โลก



โลกมีรูปร่างเป็นทรงกลม ดังนั้น
ด้านซ้ายสุด และ ขวาสุดของแผนที่
จึงเป็นตำแหน่งที่อยู่ติดกัน

แผนผังคาร์โนห์





แผนผังคาร์โนห์ ถึงแม่เราจะเขียนเป็นตาราง 2 มิติ แต่จริงๆแล้วมีลักษณะเป็น Torus ดังนั้น ตำแหน่งขอบของตารางจึงอยู่ติดกัน (ซ้าย-ขวา , บน-ล่าง และ มุมทั้ง 4)

แผนผังคาร์โนห์มีรูปร่างเป็นโดนัท

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

a และ b ทั้งแถว ให้ตัดออกได้เลย

y: c \ ba	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	0	0	0

c มีค่าเดียว

$$y' = \bar{c}$$

c มีทั้ง 0 และ 1

b,a มีเพียงค่าเดียว

ถ้าใช้ Minterm

$$y'' = \overline{ba}$$

ตอบ $y = \bar{c} + \overline{ba}$

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

y \ b a / c	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	0	0	0

$\overline{a+c}$

$\overline{b+c}$

ถ้าใช้ Maxterm

ตอบ $y = (\overline{a+c})(\overline{b+c})$

แผนผังคาร์โนห์

INPUT			OUTPUT
c	b	a	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Kmap (Minterm)

$$y = \bar{c} + \overline{ba}$$

Kmap (Maxterm)

$$y = (\overline{a + c})(\overline{b + c})$$

Boolean

$$\mathrm{y} = (\bar{c} + b + \bar{a}) \cdot (\bar{c} + \bar{\mathrm{b}} + a) + \bar{c} + \bar{\mathrm{b}} + \bar{a}$$

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

INPUT			OUTPUT
a	b	c	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

y (a b \ c)	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

b

Kmap (Minterm)

$$y = b$$

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

INPUT			OUTPUT
a	b	c	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

y \ a b / c	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

b

Kmap (Maxterm)

$$y = b$$

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

INPUT			OUTPUT
a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

y (a b \ c)	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

Kmap (Minterm)

$$y = \bar{b}$$

แผนผังคาร์โนห์

INPUT				OUTPUT
a	b	c	d	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

แผนผังคาร์โน ขนาด 4 บิต

Kmap (Minterm)

$a\bar{c}\bar{d}$

y (cd \ ab)	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$\bar{b}\bar{d}$

bd

$$y = a\overline{cd} + bd + \overline{bd}$$

แผนผังคาร์โนห์

INPUT				OUTPUT
a	b	c	d	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

แผนผังคาร์โน ขนาด 4 บิต Kmap (Maxterm)

$a + \bar{b} + d$

y (a, b \ c, d)	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

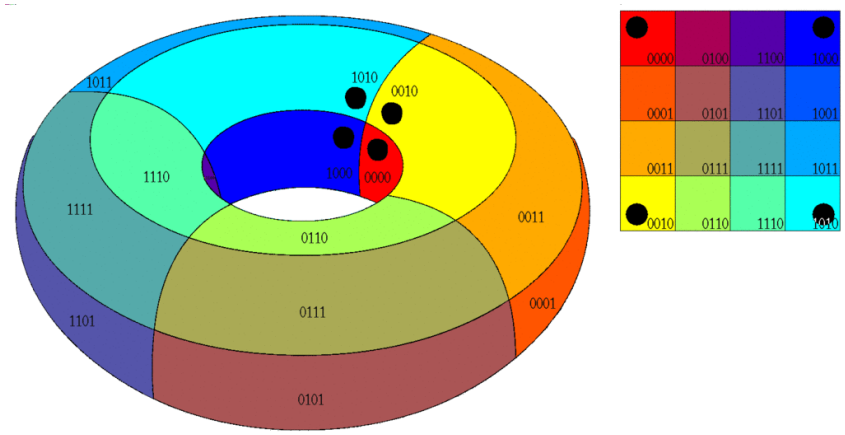
$b + \bar{d}$

$\bar{b} + \bar{c} + d$

$$y = (a + \bar{b} + d)(b + \bar{d})(\bar{b} + \bar{c} + d)$$

ข้อควรระวังในการใช้แผนผังคาร์โนห์

1) ในการลดรูปให้รวมเป็นคู่เท่านั้น (ห้ามจับเป็นเลขคี่)
2) ห้ามจับ Minterm และ Maxterm ในกระดานเดียวกัน
3) ห้ามจับคู่ในแนวทแยง
4) การระบุตำแหน่งแถวและสดมภ์ข้องใช้รหัสเกรย์เท่านั้น



แผนผังคาร์โน ถ้ามีเทอมที่ไม่สนใจ จะทำอย่างไร?

ตอบ: เทอมที่ไม่สนใจสามารถจับคู่กับอะไรก็ได้

Minterm ก็จับคู่กับ 1

Maxterm ก็จับคู่กับ 0

ถ้าไม่มีคู่ ก็ไม่ต้องสนใจ

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

INPUT			OUTPUT
a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	x
1	1	0	x
1	1	1	x

y (a b / c)	00	01	11	10
0	1	1	x	1
1	0	0	x	x

Kmap (Minterm)

$$y = \bar{c}$$

แผนผังคาร์โน ขนาด 3 บิต

INPUT			OUTPUT
a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	x
1	1	0	x
1	1	1	x

y (a b \ c)	00	01	11	10
0	1	1	x	1
1	0	0	x	x

Kmap (Maxterm)

$$y = \bar{c}$$

แผนผังคาร์โนห์

```
if((a & b & c)|| (c & a))
 {
   printf("Hello World!\n");
 }
```

INPUT			Console	OUTPUT
a	b	c		Y
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		0
1	0	1	Hello World	1
1	1	0		0
1	1	1	Hello World	1

c \ a b	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1

ac

Kmap (Minterm)

```
if(a & c)
 {
   printf("Hello World!\n");
 }
```

แผนผังคาร์โนห์

```
if((a & b & c)|| (c & a))
  {
    printf("Hello World!\n");
  }
```

0.04231 seconds

```
if(a & c)
  {
    printf("Hello World!\n");
  }
```

0.03632 seconds

14.1% Faster

ตัวอย่างสำหรับฝึกใช้แผนผังคาร์โนห์

http://electronics-course.com/karnaugh-map

แก้แผนผังคาร์โนห์ได้

แก้ตารางค่าความจริงได้

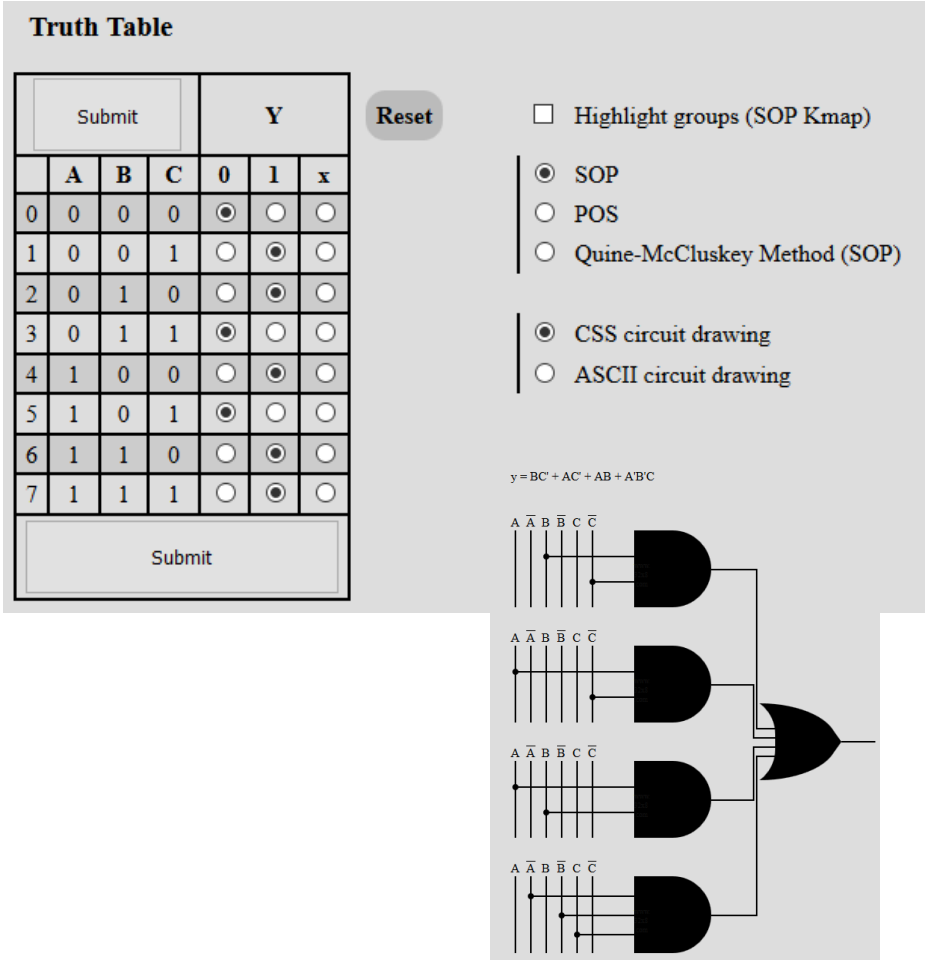
รองรับมากถึง 4 ตัวแปร

ไม่รองรับ Maxterm

ไม่มีรูปวงจร

ตัวอย่างสำหรับฝึกใช้แผนผังคาร์โนห์

http://www.32x8.com



แก้ตารางค่าความจริงได้

รองรับมากถึง 8 ตัวแปร

รองรับ Maxterm

มีรูปวงจร

แก้แผนผังคาร์โนห์ไม่ได้

การบ้าน

ให้นักศึกษาลองกลับไปดูวงจรดิจิทัลทั้งหมดที่เคยเห็นในวิชานี้ และทำลองทำการลดรูปวงจรโดยใช้แผนผังคาร์โนห์ โดยทำการตรวจคำตอบกับ โปรแกรมช่วยแก้คาร์โนห์

การบ้านนี้ไม่ต้องส่ง

ข้อสอบ Final ก็จะมีหน้าตาคล้ายๆแบบนี้